数理解析研究所講究録
947巻 1996年 99-109

不動点への近似について

高橋 渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科

非線形最小化問題や非線形発展方程式の問題において、解の問題は非線形非拡大写像または非線形非拡大半群の不動点の問題になることが多い。ここでは、非線形非拡大写像の不動点を求める 4 つの近似法について議論を行う。

E を Banach 空間とし、Cを E の空でない閉凸集合とする。Tを Cから Eへの非拡大写像とする。すなわち、

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

が成り立つものとする。このとき、つぎの 4 つの近似法について考察する。ただし、$F(T)$ は Tの不動点の集合を表し、$F(T) \neq \phi$とする。

(i) $x \in C$ とし、

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とする。このとき、$\{S_n x\}$ は $F(T)$ の元に収束するか。

(ii) $x_0 \in C$とし、

$$T_t x = (1-t)x_0 + tTx, \quad \forall x \in C, \quad 0 < t < 1$$

とする。このとき、縮小写像の不動点定理より $T_t u_t = u_t$となる T_tの不動点 u_tが一意に存在するが、$t \uparrow 1$ のとき、この $\{u_t\}$ は $F(T)$ の元に収束するか。

(iii) $x \in C$とし、$A_1 x = x$、

$$A_{n+1} x = \alpha_{n+1} x + (1 - \alpha_{n+1}) T A_n x \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad 0 < \alpha_n < 1$$

とする。 このとき、 $\{A_n x\}$ は $F(T)$ の元に収束するか。

(iv) $x \in C$とし、$x_1 = x$、

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad 0 < \alpha_n < 1$$

とする。このとき、$\{x_n\}$ は $F(T)$ の元に収束するか。

(i) の問題は 1975 年、Baillon[1] によって Hilbert 空間の場合で、$\{S_n x\}$ が $F(T)$ の元に弱収束するという形で解かれている。しかしこのままの条件では強収束しない例がある。

(ii) は 1967 年、Browder[2] によって、Hilbert 空間の場合で、$t \uparrow 1$ のとき、$\{u_t\}$ は $F(T)$ の元に強収束するという形で解かれている。

(iii) は最近（1992 年）、Wittmann[21] によって、Hilbert 空間の場合で、さらに $\{\alpha_n\}$ に条件を加えて、例えば $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ とすると、$\{A_n x\}$ は $F(T)$ の元に強収束するということが証明されている。ここで興味のあることがおこっている。(iii) において、$\alpha_n = \dfrac{1}{n}$、T はアフィンとすると、$A_n x$ は (i) の $S_n x$ と一致する。(i) の結果は弱収束どまりであるのに対し、(iii) では強収束までいえる。線形と非線形の違いがここでも如実に現れている。

(iv) は 1953 年、Mann[9] によって、$\{\alpha_n\}$ に条件を加えると $\{x_n\}$ が弱収束することが証明されている。(iv) はまた、1974 年に、Ishikawa[5] によって、もう少し一般化された形で研究されている。すなわち、

$$
\begin{aligned}
&x \in C, \quad x_1 = x,\\
&x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n] + (1-\alpha_n)x_n\\
&\qquad\qquad (n = 1,2,3,\ldots), \quad 0 < \alpha_n \leq 1, \quad 0 \leq \beta_n < 1
\end{aligned}
$$

の形で研究されている。

ここでは、これらの結果の一般化を試みるとともに、それらの相互の関係を論ずる。とくに、Banach 空間での結果はノルムの凸性や微分可能性と大いに関係しており、その証明には非線形特有の技巧や難しさが入ってくる。非線形の面白さと難しさをかい間見ていただければ幸いである。

1 Browder の定理

E を Banach 空間とし、E^* をその dual 空間とする。また、C を E の部分集合とする。このとき C から E への写像 T が

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

を満たすとき、非拡大写像といわれる。T の不動点の集合を $F(T)$ で表す。

1967 年に Browder[2] はつぎの定理を得ている。

定理 1.1 (Browder) C を Hilbert 空間の閉凸集合とし、T を C から C への非拡大写像とする。$u \in C$ と $t \in (0,1)$ に対して

$$T_t x = tTx + (1-t)u, \quad \forall x \in C$$

とする。このとき、$T_t x_t = x_t$ となる点 x_t が一意に存在し、しかも $\{x_t\}$ は $t \to 1$ のとき、T の不動点に強収束する。

この定理は後に沢山の数学者によっていろいろな形で研究された。例えば、$T : C \to E$ であるとき Marino-Trombetta[10] は、$u \in C$ と $t \in (0,1)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
S_t x &= tPTx + (1-t)u, \quad \forall x \in C,\\
U_t x &= P(tTx + (1-t)u), \quad \forall x \in C
\end{aligned}
$$

となる縮小写像 S_t, U_t を考え、Browder の定理の拡張を試みた。ただし、T は C から H への非拡大写像で、P は H から C の上への metric projection である。最近 Xu-Yin[22] はつぎの結果を得ている。Xu-Yin の結果を述べる前に定義を与えておく。C を Banach 空間 E の凸集合とし、$x \in C$ とする。このとき inward set $I_C(x)$ をつぎのように定義する。

$$I_C(x) = \{y \in E : y = x + a(z - x) \quad \text{for some} \quad z \in C \quad \text{and} \quad a \geq 0\}.$$

写像 $T : C \to E$ が weak inwardness 条件を満たすとは、任意の $x \in C$ に対して、Tx が $I_C(x)$ の閉包に含まれるときをいう。

定理 1.2 (Xu-Yin) C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし、T を C から H への weak inwardness 条件を満たす非拡大写像とする。また $u \in C$ と $t \in (0,1)$ に対して

$$x_t = tPTx_t + (1-t)u$$

とする。ただし P は H から C の上への metric projection である。このとき、$F(T) \neq \phi$ であるための必要十分条件は $\{x_t\}$ が $t \to 1$ のとき有界となることである。さらにこのとき、$\{x_t\}$ は T の不動点に強収束する。

定理 1.3 (Xu-Yin) C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし、T を C から H への weak inwardness 条件を満たす非拡大写像とする。また $u \in C$ と $t \in (0,1)$ に対して

$$x_t = P(tTx_t + (1-t)u)$$

とする。ただし、P は H から C の上への metric projection とする。このとき、$F(T) \neq \phi$ であるための必要十分条件は $\{x_t\}$ が $t \to 1$ のとき有界となることである。さらにこのとき、$\{x_t\}$ は T の不動点に強収束する。

この節では、これら Xu-Yin の結果 [22] を Banach 空間の場合まで拡張することを試みる。その前に定義を与えておく。C を Banach 空間 E の閉凸集合とし、$D \subset C$ とする。P を C から D の上への写像とする。このとき、P がサニーであるとは $x \in C$ と $t \geq 0$ に対して、$Px + t(x - Px) \in C$ であるならば

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

がつねに成り立つことである。また C から C への写像 P が $P^2 = P$ を満たすとき retraction といわれる。Banach 空間におけるサニー非拡大 retraction は Hilbert 空間での metric projection を拡張した概念である。C を Banach 空間 E の閉凸集合とする。このとき、C が正規構造をもつとは、C の 2 点以上含む任意の有界閉凸集合 K が

$$\sup\{\|z - y\| : y \in K\} < \sup\{\|x - y\| : x, y \in K\}$$

となるような点 $z \in K$ を含むときをいう。一様凸な Banach 空間の閉凸集合は常に正規構造をもつことが知られている。また、Banach 空間のコンパクト凸集合も正規構造を持つ。

E を Banach 空間とし、$S(E)=\{x\in E:\|x\|=1\}$ とする。このとき、$x,y\in S(E)$ に対して、つぎの極限を考える。

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}.$$

Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは、$S(E)$ の任意の元 x,y に対して、つねにその極限が存在するときをいう。このとき、E は滑らかであるともいわれる。また、Banach 空間 E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは、任意の $y\in S(E)$ に対して、その極限が $x\in S(E)$ に関して一様に収束するときをいう。Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは、任意の $x\in S(E)$ に対して、その極限が $y\in S(E)$ に関して一様に収束するときをいう。Banach 空間 E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるとは、その極限が $S(E)$ の元 x,y に関して一様に収束するときをいう。このとき、E は一様に滑らかであるともいわれる。Banach 空間 E の元 $x\in E$ に対して、E^* の集合

$$J(x)=\{f\in E^*:f(x)=\|x\|^2=\|f\|^2\}$$

が定義されるが、この写像 J は E 上の duality mapping といわれる。E が滑らかであるとき、J は一価写像となる。つぎの定理は Xu-Yin の定理を Banach 空間の場合まで拡張するための本質的定理 [18] である。この定理の証明には Kirk の不動点定理 [7] が用いられる。

定理 1.4 E を回帰的な Banach 空間で、一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつものとする。C を E の正規構造をもつ閉凸集合とし、T を C から C への非拡大写像とする。また、$u\in C$ と $t\in(0,1)$ に対して、x_t を

$$T_tx=tTx+(1-t)u,\quad \forall x\in C$$

で定義される縮小写像 T_t の唯一の不動点とする。このとき、$F(T)\neq\phi$ となるための必要十分条件は $\{x_t\}$ が $t\to 1$ のとき有界となることである。この場合、$\{x_t\}$ は T の不動点に強収束する。

つぎの定理 [18] は Xu-Yin の結果 [22] を Banach 空間へ拡張する定理である。

定理 1.5 E を回帰的な Banach 空間で、一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつものとする。C を E の正規構造をもつ閉凸集合とし、T を C から E への weak inwardness 条件を満たす非拡大写像とする。また $u\in C$ と $t\in(0,1)$ に対して、x_t を

$$S_tx=tPTx+(1-t)u,\quad \forall x\in C$$

で定義される縮小写像 S_t の唯一の不動点とする。ただし P は E から C の上へのサニー非拡大 retraction とする。このとき、$F(T)\neq\phi$ となるための必要十分条件は $\{x_t\}$ が $t\to 1$ のとき有界となることである。この場合、$\{x_t\}$ は T の不動点に強収束する。

さらにつぎの定理 [18] も証明することができる。

定理 1.6 E を回帰的な Banach 空間で、一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつものとする。C を E の正規構造をもつ閉凸集合とし、T を C から E への weak inwardness 条件を満たす非拡大写像とする。また $u \in C$ と $t \in (0,1)$ に対して、x_t を

$$U_t x = P(tTx + (1-t)u), \quad \forall x \in C$$

で定義される縮小写像 U_t の唯一の不動点とする。ただし、P は E から C の上へのサニー非拡大 retraction とする。このとき、$F(T) \neq \phi$ となるための必要十分条件は $\{x_t\}$ が $t \to 1$ のとき有界となることである。この場合、$\{x_t\}$ は T の不動点に強収束する。

2 Mann と Ishikawa の iteration scheme

C を Banach 空間 E の閉凸集合とし、T を C から C への非拡大写像とする。このとき、$x \in C$ とし、$x_1 = x$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n] + (1-\alpha_n)x_n,$$
$$0 < \alpha_n \leq 1, \quad 0 \leq \beta_n < 1, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

を考える。この iteration scheme は 1974 年、Ishikawa[5] によって考えられたものであるが、$\beta_n = 0$ のときは Mann[9] によるものである。ここで、

$$T_n x = \alpha_n T[\beta_n T x + (1-\beta_n)x] + (1-\alpha_n)x, \quad \forall x \in C$$

とおくと、$F(T_n) = F(T)$ となる興味ある事実が証明できる。実際、$z \in F(T)$ ならば $z \in F(T_n)$ であるので $F(T) \subset F(T_n)$ がいえ、逆に、$z \in F(T_n)$ ならば

$$z = \alpha_n T[\beta_n T z + (1-\beta_n)z] + (1-\alpha_n)z$$

であるから、$z = T[\beta_n T z + (1-\beta_n)z]$ がいえる。いま $Tz \neq z$ とし、$u = \beta_n T z + (1-\beta_n)z$ とおくと、

$$\|Tz - z\| = \|Tz - Tu\| \leq \|z - u\|$$

となる。これは矛盾である。よって $Tz = z$ である。これは $F(T_n) \subset F(T)$ を意味する。この事実により、つぎの補助定理 [17] が思いつく。

補助定理 2.1 E を一様凸な Banach 空間で、しかも Fréchet 微分可能なノルムをもつものとする。C を E の閉凸集合とし、$\{T_1, T_2, \cdots\}$ を C から C への非拡大写像 T_n の列で、$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \phi$ となるものとする。このとき、$x \in C$ と $S_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1, n = 1, 2, \cdots$ に対して、集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{S_m x : m \geq n\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$$

は高々一点からなる。

この証明は、本来非常に難しいものであった [8], [19] が、Bruck [3] の結果と E のノルムの条件 (Fréchet 微分可能) から得られる不等式を用いると、比較的短く証明できる [17]。次の補助定理 [17] は点列 $\{x_n\}$ の弱収束性を論ずるための本質的な結果である。この定理の証明には Kirk の不動点定理 [7] と Schu の結果 [11] が用いられる。

補助定理 2.2 C を一様凸な Banach 空間 E の閉凸集合とし、T を C から C への非拡大写像とする。$x_1 \in C$ とし、

$$x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n] + (1-\alpha_n)x_n, \quad n \geq 1$$

とする。ここで、α_n, β_n はある $a, b (0 < a \leq b < 1)$ に対して

$$\alpha_n \in [a, b], \beta_n \in [0, b] \quad \text{または} \quad \alpha_n \in [a, 1], \beta_n \in [a, b]$$

となるものとする。このとき、$F(T) \neq \phi$ であるための必要十分条件は $\{x_n\}$ が有界であり、$\|x_n - Tx_n\| \to 0$ となることである。

補助定理 2.2 を用いてつぎの 2 つの定理 [17] を得ることができる。その前に定義を 1 つ与えておく。E を Banach 空間とする。このとき、E が Opial 条件を満たすとは、E の点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束し、$x \neq y$ であるときはいつでも

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が成り立つときをいう。Hilbert 空間は Opial 条件を満たす。また ℓ^p $(1 < p < \infty)$ も Opial 条件を満たす。L^p $(1 < p < \infty, p \neq 2)$ は Opial 条件を満たさない。

定理 2.3 E を Opial 条件を満たす一様凸な Banach 空間とする。C を E の閉凸集合とし、T を C から C への非拡大写像で、$F(T) \neq \phi$ となるものとする。$x_1 \in C$ とし、

$$x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n] + (1-\alpha_n)x_n, \quad n \geq 1$$

とする。ここで、α_n, β_n はある $a, b (0 < a \leq b < 1)$ に対して

$$\alpha_n \in [a, b], \beta_n \in [0, b] \quad \text{または} \quad \alpha_n \in [a, 1], \beta_n \in [a, b]$$

となるものとする。このとき、点列 $\{x_n\}$ は T の不動点に弱収束する。

定理 2.4 E を一様凸な Banach 定理とし、さらにそのノルムが Fréchet 微分可能なものとする。C を E の閉凸集合とし、T を C から C への非拡大写像で、$F(T) \neq \phi$ となるものとする。$x_1 \in C$ とし、

$$x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n] + (1-\alpha_n)x_n, \quad n \geq 1$$

とする。ここで、α_n, β_n はある $a, b (0 < a \leq b < 1)$ に対して

$$\alpha_n \in [a, b], \beta_n \in [0, b] \quad \text{または} \quad \alpha_n \in [a, 1], \beta_n \in [a, b]$$

となるものとする。このとき、点列 $\{x_n\}$ は T の不動点に弱収束する。

これらの定理を Tan-Xu[20] の結果と比較してみると、まずα_n, β_n のチェックが簡単であり、さらに$\alpha_n \in [a,1]$, $\beta_n \in [a,b]$ の場合でも $\{x_n\}$ の弱収束性がいえるという点である。

つぎは強収束に関する定理 [17] である。

定理 2.5 E を狭義凸な Banach 空間とし、C を E の閉凸集合とする。T を C から C への非拡大写像とし、$T(C)$ が C のあるコンパクト集合に含まれるものとする。$x_1 \in C$ とし、

$$x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n] + (1-\alpha_n)x_n, \quad n \geq 1$$

とする。ここで、α_n, β_n はある $a, b (0 < a \leq b < 1)$ に対して

$$\alpha_n \in [a,b], \beta_n \in [0,b] \quad \text{または} \quad \alpha_n \in [a,1], \beta_n \in [a,b]$$

となるものとする。このとき、点列 $\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する。

3 Baillon と Wittmann の定理

1975 年, Baillon[1] は Hilbert 空間において最初の非線形エルゴード定理を証明した。

定理 3.1 (Baillon) C を Hilbert 空間における閉凸集合とし、T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする。このとき、任意の $x \in C$ に対して

$$S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は、T の不動点に弱収束する。

前にも述べたように、このままの条件では $S_n x$ が T の不動点に強収束しない例がつくれる。

Baillon の定理は最近では著者 [16] によってつぎの形にまで拡張されているので、それを挙げておく。その前にいくつかの定義を与えておく。

S を semitopological 半群 ($S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ や $S = [0, \infty)$ はその例である) とし、$B(S)$ を S 上の有界実数値関数のつくる Banach 空間とする。X を恒等的に 1 となる関数 e を含む $B(S)$ の部分空間とする。$\mu \in X^*$ が $\|\mu\| = 1 = \mu(e)$ を満たすとき、μ を X 上の mean という。$f \in B(S)$ と $a \in S$ に対して

$$(l_a f)(t) = f(at), \quad (r_a f)(t) = f(ta)$$

で l_a, r_a を定義し、$B(S)$ の部分空間 X は $l_a(X) \subset X, r_a(X) \subset X$ を満たすものとする。このとき、X 上の means の $net\{\mu_\alpha\}$ が $f \in X$ と $a \in S$ に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_a f) \to 0, \quad \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_a f) \to 0$$

を満たすとき、漸近的に不変であるという。例えば、$S=\{0,1,2,\cdots\}$ とし、$x=\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}\in B(S)$ に対して

$$\mu_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とすると、$\{\mu_n\}$ は $B(S)$ 上の漸近的に不変な means の net である。S 上の有界連続関数 f に対して、$a\mapsto r_af$ が連続となるような元 f の全体を $RUC(S)$ で表すと、$X=RUC(S)$ は e を含み、$l_a(X)\subset X, r_a(X)\subset X$ となるような $B(S)$ の部分空間となる。

C を Hilbert 空間 H の閉部分集合とし、$\mathcal{S}=\{T_t:t\in S\}$ を C から C への写像 T_t の族とする。このとき $\mathcal{S}=\{T_t:t\in S\}$ が

(1) $T_{ts}x=T_tT_sx, \quad \forall t,s\in S,\forall x\in C$;

(2) 任意の $x\in C$ に対して、$t\mapsto T_tx$ は連続である;

(3) $\|T_tx-T_ty\|\le\|x-y\|, \quad \forall x,y\in C,\forall t\in S$

を満たすとき、C 上の非拡大半群といわれる。いま $\sup_{s\in S}\|T_sx\|<+\infty$ とすると $RUC(S)$ 上の mean μ に対して、 Riesz の定理によって

$$\mu_t(T_tx,y)=(x_0,y), \quad \forall y\in H$$

となる $x_0\in H$ が存在する [13] が、 この x_0 を $T_\mu x=x_0$で表すとつぎの定理が成り立つ。

定理 3.2[16] C を Hilbert 空間 H の閉部分集合とする。$\mathcal{S}=\{T_t:t\in S\}$ を C 上の非拡大半群とし、$\{\mu_\alpha\}$ を $RUC(S)$ 上の漸近的に不変な means の net とする。さらに、 C のある元 x に対し、$\{T_tx:t\in S\}$ は有界で、$\bigcap_{t\in S}\overline{co}\{T_{ts}x:s\in S\}\subset C$ とする。このとき、$\bigcap_{t\in S}F(T_t)\neq\phi$ であり、かつ $\{T_{\mu_\alpha}x\}$ は$\bigcap_{t\in S}F(T_t)$ の元に弱収束する。

これから Baillon の定理 (定理 3.1) やつぎの定理 [15] がただちに得られる。

定理 3.3 C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし、 $S=\{S(t):t\in[0,\infty)\}$ を C 上の非拡大半群とする。また $\bigcap_{t\ge0}F(S(t))\neq\phi$ とする。このとき、任意の $x\in C$ に対して

$$S_\lambda x=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)xdt$$

は $\bigcap_{t\ge0}F(S(t))$ の元に弱収束する。

定理 3.2 を Banach 空間の場合まで拡張することが著者等 [6] によって試みられているが、まだ完全には証明されていない。 S に可換という条件をつけると、Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間で、その命題に近い形のもの [4] が証明される。

最近 (1992 年), Wittmann[21] はつぎの定理を証明した。

定理 3.4(Wittmann) $\{\alpha_n\}$ を (0,1) の元 α_n の実数列で (i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$; (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1}-\alpha_n| < +\infty$ となるものとする。

C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし、T を C から C への $F(T)\neq\phi$ となる非拡大写像とする。$x\in C$ とし、$x_1 = x$

$$x_{n+1} = \alpha_{n+1}x + (1-\alpha_{n+1})Tx_n, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

とする。このとき、$\{x_n\}$ は T の不動点 x_0 に強収束する。また $x_0 = Px$ である。ただし P は H から $F(T)$ の上への metric projection である。

Wittmann の定理で $\alpha = \frac{1}{n}$ とし、T をアフィンとすると、それは Baillon の定理と一致する。Baillon の定理は弱収束どまりであるのに対し、Wittmann の定理は強収束までいえる。

つぎの定理は Wittmann の定理を Banach 空間の場合まで拡張するものである。

定理 3.5 $\{\alpha_n\}$ を (i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$; (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1}-\alpha_n| < +\infty$ となる (0,1) の元α_n の実数列とする。

E を一様凸で一様滑らかな Banach 空間で、 weakly sequentially continuous duality mapping をもつものとする。duality mapping J が weakly sequentially continuous であるとは $\{x_n\}$ が x に弱収束するならば、$\{J(x_n)\}$ が $J(x)$ に弱スターの意味で収束するときをいう。C を E の閉凸部分集合とし、T を C から C への $F(T)\neq\phi$ となる非拡大写像とする。 $x\in C$ とし、$x_1 = x$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

とする。このとき、$\{x_n\}$ は T の不動点 x_0 に強収束する。また $x_0 = Px$ である。ただし、P は E から $F(T)$ の上へのサニー非拡大な retraction である。

この定理の証明では、 Banach 空間が一様凸で、一様滑らかであるという性質が本質的である。Wittmann は Hilbert 空間で metric projection の性質を上手に使うことによって定理 3.4 を証明したが、上の定理の証明では、サニー非拡大 retract の性質を上手に使うことになる。また上の定理は最近、Shioji-Takahashi[12] によって、一様凸で、一様に滑らかという条件のみによって証明されたことを報告しておく。ここでは Banach limit の性質が上手に使われることになる。

確かに Wittmannn の定理は強収束までいえて、Baillon の定理は弱収束までしかいえない。しかしながら Baillon の定理は自然な形で非可換半群まで拡張されるのに対し、Wittmann の定理はそのような半群まで拡張することは不可能なように思える。Wittmann の定理を一般の半群まで拡張することは興味のあることである。

参考文献

[1] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 280 (1975), 1511-1514.

[2] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces,* Archs. Ration. Mech. Anal., 24 (1967), 82-90.

[3] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces,* Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.

[4] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces,* Nonlinear Analysis, 12 (1988), 1269-1281.

[5] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method,* Proc. Amer. Math. Soc., 44 (1974), 147-150.

[6] O. kada, A. T. Lau and W. Takahashi, *Asymptotically invariant net and fixed point set for semigroup of nonexpansive mappings,* to appear in Nonlinear Analysis.

[7] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances,* Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004-1006.

[8] A. T. Lau and W. Takahashi, *Weak Convergence and Non-Linear Ergodic Theorems for Reversible Semigroups of Nonexpansive Mappings,* Pacific J. Math., 126 (1987), 277-294.

[9] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration,* Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 506-510.

[10] G. Marino and G. Trombetta, *On approximating fixed points for nonexpansive maps,* Indian J. Math., 34 (1992), 91-98.

[11] J. Schu, *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings,* Bull. Austral. Math. Soc., 43 (1991), 153-159.

[12] N. shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces,* to appear.

[13] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

[14] W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets.* J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.

[15] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese),* Kindaikagaku, Tokyo, 1988.

[16] W.Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity,* Can. J. Math., 44 (1992), 880-887.

[17] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces,* to appear in Topol. Methods Nonlinear Anal..

[18] W. Takahashi and G. E. Kim, *Strong convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonself-mappings in Banach spaces,* to appear in Nonlinear Analysis.

[19] W. Takahashi and J. Y. Park, *On the asymptotic behavior of almost-orbits of commutative semigroups in Banach spaces,* Nonlinear and Convex Analysis (B. L. Lin and S. Simons, eds.), Marcel Dekker, 1987, pp. 271-293.

[20] K. K. Tan and H. K. Xu, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process,* J. Math. Anal. Appl., 178 (1993), 301-308.

[21] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings,* Arch. Math., 58 (1992), 486-491.

[22] H. K. Xu and X. M. Yin, *Strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings,* Nonlinear Analysis, 24 (1995), 223-228.